DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

INTRODUCTION. — Données, notations et rappels.

Soient, dans tout ce problème :

$\mathcal{E}$ et $\mathcal{S}$ deux espaces affines euclidiens orientés de dimension 3;

E et S leurs espaces vectoriels (euclidiens orientés) de translations (ou vecteurs libres) respectifs;

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(\Pi; \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma})$ deux repères affines orthonormaux directs (ou positifs) de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{S}$ respectivement.

A tout quadruplet $(\Lambda, \vec{\xi}, \vec{\eta}, \vec{\zeta})$ d'applications continûment dérivables, la première de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{E}$, et les trois suivantes de $\mathbb{R}$ dans E, tel que, pour tout réel t, $(\vec{\xi}(t), \vec{\eta}(t), \vec{\zeta}(t))$ soit une base orthonormale directe de E, nous associons le *mouvement solide* Σ de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{E}$ (d'intervalle de définition $\mathbb{R}$) défini de la façon suivante :

A tout instant t (i.e. pour tout réel t) l'application de position (ou la *position*) de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{E}$ à l'instant t est l'isométrie affine directe $f_t : \mathcal{S} \to \mathcal{E}$ définie par la condition de faire correspondre au repère affine $(\Pi ; \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma})$ de $\mathcal{S}$ le repère affine $(\Lambda(t), \vec{\xi}(t), \vec{\eta}(t), \vec{\zeta}(t))$ de $\mathcal{E}$.

A tout instant t, et pour tout point M de $\mathcal{S}$, si la suite des coordonnées de M dans le repère $(\Pi; \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma})$ de $\mathcal{S}$ est (x, y, z), la *position* de M et la *vitesse de* M à l'instant t sont donc respectivement :

$$f_t(\mathrm{M}) = \Lambda(t) + \mathrm{X}\vec{\xi}(t) + \mathrm{Y}\vec{\eta}(t) + \mathrm{Z}\vec{\zeta}(t)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{V}(\mathrm{M}, t)} = \overrightarrow{\Lambda'(t)} + \mathrm{X}\vec{\xi}'(t) + \mathrm{Y}\vec{\eta}'(t) + \mathrm{Z}\vec{\zeta}'(t)$$

On rappelle, qu'à tout instant t, les champs $\overrightarrow{\mathrm{W}_{1,t}} : \mathcal{E} \to \mathrm{E}$ et $\overrightarrow{\mathrm{W}_{2,t}} : \mathcal{S} \to \mathrm{S}$ respectivement définis par

$$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{E} \qquad \overrightarrow{\mathrm{W}_{1,t}}(\mathrm{M}) = \overrightarrow{\mathrm{V}(f_t^{-1}(\mathrm{M}), t)}$$

(vitesse, à l'instant t, de celui des points de $\mathcal{S}$ qui occupe à cet instant la position M) et

$$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{S} \qquad \overrightarrow{\mathrm{W}_{2,t}}(\mathrm{M}) = l(f_t^{-1})\ (\overrightarrow{\mathrm{V}(\mathrm{M}, t)})$$

(image par $l(f_t^{-1})$, application linéaire associée à f_t^{-1} isométrie affine réciproque de f_t, de la vitesse de M à l'instant t) sont des torseurs.

A tout instant t, les sommes de ces torseurs, respectivement appelées *rotation instantanée* (du mouvement solide considéré) « dans l'espace » et « dans le solide », seront respectivement notées $\overrightarrow{\Omega_1}(t)$ et $\overrightarrow{\Omega_2}(t)$.

A tout instant t, les axes centraux de ces torseurs — lorsqu'ils existent —, respectivement appelés *axe instantané* (du mouvement solide considéré) « dans l'espace » et « dans le solide » seront respectivement notés $\mathrm{D}_1(t)$ et $\mathrm{D}_2(t)$.

On rappelle enfin (sous réserve de son existence pour l'axe instantané) que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \overrightarrow{\Omega_1}(t) = l(f_t)\ (\overrightarrow{\Omega_2}(t))$$
$$\mathrm{D}_1(t) = f_t(\mathrm{D}_2(t))$$

REMARQUE. — Les candidats pourront utiliser librement toute autre interprétation du mouvement solide Σ, équivalente à celle qui vient d'être donnée.

Cependant, dans le cas où, pour faire les calculs, ils identifieraient le repère $(\Pi ; \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma})$ au quadruplet d'*applications* $(\Lambda ; \vec{\xi}, \vec{\eta}, \vec{\zeta})$, et, par conséquent, « les points M » du solide à leurs *mouvements ponctuels* $t \longmapsto f_t(\mathrm{M})$, ils feront très attention à ne pas se laisser entraîner à commettre les fautes de raisonnement qui en découlent trop souvent.

.../...

I

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{I}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$ les applications de $\mathbb{R}$ dans E et A l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{E}$ définies par :

$$\left|\begin{array}{l}
\forall\, t \in \mathbb{R} \\
\vec{u}(t) = (\cos t)\,\vec{i} + (\sin t)\,\vec{j} \\
\vec{v}(t) = -(\sin t)\,\vec{i} + (\cos t)\,\vec{j} \\
\vec{I}(t) = \left(\cos \frac{\sqrt{2}}{2} t\right) \vec{u}(t) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin \frac{\sqrt{2}}{2} t\right)\left(\vec{v}(t) + \vec{k}\right) \\
\vec{J}(t) = \left(\sin \frac{\sqrt{2}}{2} t\right) \vec{u}(t) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos \frac{\sqrt{2}}{2} t\right)\left(\vec{v}(t) + \vec{k}\right) \\
\vec{K}(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(-\vec{v}(t) + \vec{k}\right) \\
\mathrm{A}(t) = 0 + t\,\vec{k} \\
\qquad\qquad (i.e : \overrightarrow{0\mathrm{A}}(t) = t\,\vec{k})
\end{array}\right.$$

I.1° Vérifier que, pour tout réel t, $(\vec{I}(t), \vec{J}(t), \vec{K}(t))$ est une base orthonormale directe de E.

On considère désormais, dans cette partie I, le mouvement solide Σ de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{E}$ associé au quadruplet d'applications (manifestement continûment dérivables) $(A; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ par le procédé indiqué dans l'introduction.

I.2° Déterminer, à tout instant t, les rotations instantanées du mouvement solide Σ, $\overrightarrow{\Omega_1}(t)$ et $\overrightarrow{\Omega_2}(t)$ « dans l'espace » et « dans le solide » respectivement.

I.3° Déterminer, à tout instant t, les axes instantanés (dont on établira l'existence) du mouvement solide Σ, $D_1(t)$ et $D_2(t)$, « dans l'espace » et « dans le solide » respectivement.

(On déterminera chacun de ces axes comme une intersection de plans dont on donnera les équations cartésiennes dans le repère correspondant.)

I.4° *a*. Démontrer que, lorsque t décrit $\mathbb{R}$, l'ensemble des droites $D_2(t)$ est l'ensemble des tangentes à un cercle C de $\mathcal{S}$ (C sera défini par son centre, son plan et son rayon).

I.4° *b*. A tout instant t, on désigne par $Q(t)$ le point de contact de $D_2(t)$ et de C. Étudier dans $\mathcal{S}$ le mouvement ponctuel $t \longmapsto Q(t)$.

I.4° *c*. A tout instant t, déterminer la vitesse $\overrightarrow{V(Q(t), t)}$ de celui des points du solide $\mathcal{S}$ qui, à l'instant t coïncide avec $Q(t)$.

I.5° *a*. Démontrer que, lorsque t décrit $\mathbb{R}$, l'ensemble des droites $D_1(t)$ est l'ensemble des tangentes à une hélice circulaire H d'axe $(0; \vec{k})$ dans $\mathcal{E}$.

I.5° *b*. A tout instant t, on désigne par $P(t)$ le point de contact de $D_1(t)$ et de H. Étudier dans $\mathcal{E}$ le mouvement ponctuel $t \longmapsto P(t)$.

I.6° *a*. Vérifier que

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \qquad f_t\,(Q(t)) = P(t)$$

(c'est-à-dire, qu'à tout instant t, la position dans le mouvement solide Σ du point de contact $Q(t)$ de $D_2(t)$ et de C est le point de contact $P(t)$ de $D_1(t)$ et de H.)

I.6° *b*. Vérifier à l'aide du théorème de composition des mouvements, la cohérence des résultats trouvés pour les vitesses aux paragraphes I.4° *b*, I.4° *c* et I.5° *b*.

.../...

I.7° Soient, à tout instant t, $(\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t))$ le trièdre de Frénet de l'arc paramètre H $(t \longmapsto P(t))$ orienté dans le sens des t croissants, au point de paramètre t, et $\rho(t)$ le rayon de courbure de H au point de paramètre t avec les conditions $\rho(t) > 0$ et $(\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t))$ direct.

I.7° *a.* Déterminer, pour tout réel t, $\vec{T}(t)$, $\vec{N}(t)$, $\vec{B}(t)$ et $\rho(t)$.

I.7° *b.* Définir, à tout instant t, la position (image par f_t) du cercle C par rapport au repère $(P(t); \vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t))$ de $\mathcal{E}$.

I.8° Lorsque t décrit $\mathbb{R}$, $D_2(t)$ appartient à un plan fixe Φ de $\mathcal{S}$ (le plan de C) et $D_1(t)$ engendre une surface Ψ de $\mathcal{E}$ (l'ensemble des tangentes à H).

Démontrer, qu'à tout instant t, $f_t(\Phi)$ (position de Φ à l'instant t) est tangent à Ψ en tout point de $D_1(t)$.

II.1° Dans cette question, les données sont encore celles du I.

Démontrer qu'il existe un nombre réel λ, et un seul, tel, qu'à tout instant t,

$$(\vec{A}'(t) + \lambda \vec{u}'(t)) \cdot \vec{\Omega}_1(t) = 0$$

et le déterminer.

On considère désormais le mouvement solide Σ_1 de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{E}$ associé au quadruplet d'applications $(\vec{A}_1; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ par le procédé indiqué dans l'introduction, avec $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ définis au I et

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad A_1(t) = A(t) + \lambda \vec{u}(t)$$

(on fera attention à ce que, à tout instant t, $A(t)$ et $A_1(t)$ sont les positions du même point Π de $\mathcal{S}$ dans les mouvements solides respectifs Σ et Σ_1).

II.2° Démontrer (ce qui peut se faire avec fort peu de calculs) que, dans ce nouveau mouvement solide Σ_1.

a. A tout instant t, l'axe instantané « dans l'espace » est encore $D_1(t)$ (défini au I. 3°).

b. L'ensemble des axes instantanés « dans le solide » lorsque t décrit $\mathbb{R}$, est l'ensemble des tangentes à un cercle C_1 de $\mathcal{S}$ que l'on définira et dont on comparera le rayon à $\rho(t)$. On appellera $Q_1(t)$ le point de contact à tout instant t, de C_1 avec cet axe instantané.

c. A tout instant t, la position de $Q_1(t)$ est $P(t)$ et la position du plan de C_1 est le plan osculateur à H en ce même point.

d. Les normes euclidiennes des vitesses de Q_1 dans $\mathcal{S}$ et de P dans $\mathcal{E}$ sont, à tout instant, égales.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail